9- лекция. **Дәрежелік қатарлар**

Дайындаған Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

9 - лекция
9. Дәрежелік қатарлар

Анықтама 5. ($x-a$) –ға қатысты дәрежелік қатар деп:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad (3)$$

түрінде берілген қатарды айтамыз, мұндағы $a_0, a_1, a_2, ...$ коэффиценттері – тұрақты сандар.

Егер $a=0$ болса, онда: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (4)

Теорема 5. (Абель). $x = x_0$ болғанда (4) қатары жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ болғанда абсолютті жинақты; ал оның $x = x_0$ болғанда жинақсыз болуынан, $|x| > |x_0|$ болғанда жинақсыздығы шығады.

Абель теоремасынан: (4) қатары үшін жалғыз ғана R саны, $0 \le R \le \infty$, табылады, $|x| < R$ болғанда (2) қатары жинақты, ал $|x| > R$ үшін жинақсыз болатындай.

R саны дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы деп аталады, ал $(-R;R)$ - жинақтылық интервалы деп аталады. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ақырлы шегі табылса, онда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ қатарына

Даламбер белгісін қолдансақ, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{L} = R$,

яғни, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Дәл осылай, Коши белгісін қолдансақ: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Мысал 3. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n} + ...$ қатарының жинақтылық облысын тап.

$a_n = \dfrac{1}{n}$ болғандықтан, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n=1}{n} = 1$ - жинақтылық радиусы. $x = \pm 1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x = 1 \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ...$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

$x = -1 \Rightarrow -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ...$-таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар (*мысал 6*). Сонымен, берілген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы: $[-1;1)$.

(3) қатарының жинақтылық интервалы $(a-R;\ a+R)$, мұндағы R - (4) қатарының жинақтылық радиусы.

D -кез келген бүтіндей (3) қатарының жинақтылық интервалының ішінде жататын кесінді болсын. Онда:

1. (3) қатары мажорланған (бірқалыпты жинақты) D кесіндісінде.
2. (3) қатарының қосындысы жинақтылық интервалында үзіліссіз.

9- лекция. **Дәрежелік қатарлар**

Дайындаған Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің ağa оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

3. (3) қатарын D кесіндісінде мүшелеп интегралдауға және қанша болса сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болады, сонымен қатар, алынған дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы (3) қатарының жинақтылық интервалымен бірдей.

Мысал 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Шешуі. $c_n=\frac{1}{n}$ болады, онда жинақтылық радиусы $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$;

$(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

$x=-1$ болсын, онда берілген қатар: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ түрінде болады.

Бұл қатар шартты жинақты, себебі $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ жинақсыз және

а) $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$x=1$ болса, берілген қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармониялық қатар және ол жинақсыз қатар. Сонымен, берілген қатар $x\in(-1,1)$ аралығында абсолютті жинақты, $x=-1$ болғанда шартты жинақты.

Мысал 5. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі. $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n\neq 0$ егер $n=3,4,...$ болса.

Онда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)}=1$.

Сонымен, $R=1$- жинақтылық радиусы; $(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$x=-1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n-2)}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-2)}=1\neq 0.$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $x=-1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

9- лекция. **Дәрежелік қатарлар**

Дайындаған Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Егер $x = 1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum_{n\to 0}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $x \in [-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 3 бөлім Бастау, 2008

4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.